

Komplexe Zahlen in der Dreiecksgeometrie

Edzard Salow

Die neun Punkte, die dem Neun-Punkte-Kreis eines Dreiecks ABC den Namen geben, lassen sich in drei Dreiecke aufteilen:

- das Dreieck UVW der Seitenmitten von BC , CA und AB
- das Dreieck der Euler-Punkte, die durch Spiegelung von U , V und W am Zentrum N entstehen
- das Dreieck $U'V'W'$ der Fußpunkte der Höhen durch A , B und C .

Unser Interesse richtet sich hier auf den Zusammenhang zwischen den Dreiecken UVW und $U'V'W'$. Er kann algebraisch besonders einfach mit Hilfe von komplexen Zahlen dargestellt werden.

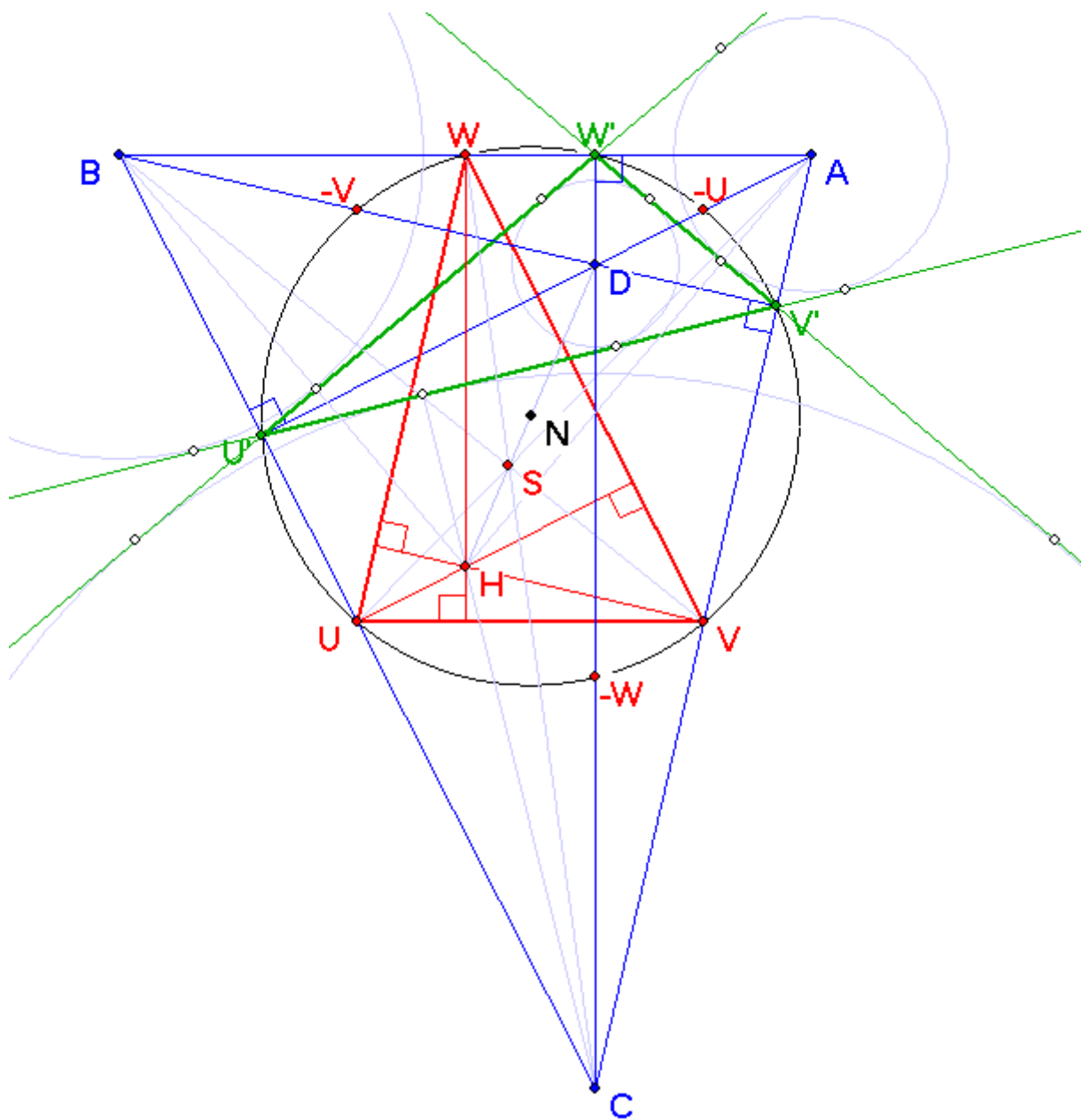


Abb. 1

0. Die komplexe Ebene

Wenn man in einer Ebene ein kartesisches Koordinatensystem (Nullpunkt N) eingeführt hat, kann man für Punkte $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$ eine Addition durch

$$P + Q = (x_P + x_Q | y_P + y_Q)$$

und eine Multiplikation durch

$$P \cdot Q = (x_P \cdot x_Q - y_P \cdot y_Q | x_P \cdot y_Q + y_P \cdot x_Q)$$

definieren, so dass das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz gelten. Die Addition ist eine Übertragung der Vektoraddition im \mathbb{R}^2 . Die Zahl x_P wird als 'Realteil von P ' bezeichnet, abgekürzt $\text{Re}(P)$, und y_P als 'Imaginärteil von P ', abgekürzt $\text{Im}(P)$.

Die Multiplikation wird verständlich, wenn man das Zahlenpaar $(x_P|y_P)$ durch den Term $x_P + y_P \cdot I$ ersetzt mit einem Buchstaben I (der sonst meist als kleines i geschrieben wird). Berechnet man formal

$$(x_P + y_P \cdot I) \cdot (x_Q + y_Q \cdot I) = x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q \cdot I^2 + (x_P \cdot y_Q + y_P \cdot x_Q) \cdot I$$

und ersetzt I^2 durch -1 , so ergibt sich die oben eingeführte Multiplikation.

$I = 0 + 1 \cdot I$ ist dabei der Punkt $(0 | 1)$.

Definiert man diese beiden Rechenoperationen für die Punkte der Ebene, dann wird dadurch die Menge der komplexen Zahlen in entsprechender Weise dargestellt wie die Menge der reellen Zahlen durch die Zahlengerade (hier die x-Achse). $E = (1 | 0)$ ist dabei das Einselement und $N = (0 | 0)$ das Nullelement. Wenn P ein Punkt der x-Achse ist, dann identifiziert man ihn mit der Zahl x_P und schreibt statt $P \cdot Q$ auch $x_P \cdot Q$.

Statt durch kartesische Koordinaten $(x_P|y_P)$ kann man einen Punkt P auch durch Polarkoordinaten $(r_P|\varphi_P)$ beschreiben. Dabei ist $r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ der Abstand des Punktes P vom Ursprung N . Er wird 'Betrag von P ' oder 'Modul von P ' genannt und auch durch $|x_P + y_P \cdot I|$ bezeichnet. Für $P \neq N$ ist φ_P der Maßwert des Richtungswinkels vom Ortsvektor \overrightarrow{NP} , also der Maßwert des gerichteten Winkels, der überdeckt wird, wenn man den Vektor \overrightarrow{NE} um N gegen den Uhrzeigersinn in die Richtung von \overrightarrow{NP} dreht. Man nennt φ_P auch 'Argument von P ', abgekürzt $\arg(P)$. Für $P = N$ ist $r_P = 0$ und φ_P undefiniert.

Der Begriff 'Betrag von P ' und 'Argument oder Richtungswinkel von P ' ergibt nur innerhalb des von uns zugrundegelegten Koordinatensystems einen Sinn, da der Betrag auf den Koordinatenursprung bezogen ist und der Richtungswinkel auf die x-Achse.

Der Übergang von den Polarkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten ist durch

$$(x_P; y_P) = (r_P \cdot \cos(\varphi_P); r_P \cdot \sin(\varphi_P)) = r_P \cdot \cos(\varphi_P) + r_P \cdot \sin(\varphi_P) \cdot I$$

gegeben. Mit den Additionstheoremen für die Sinus- und die Kosinus-Funktion ergibt sich

$$\begin{aligned} (x_P; y_P) \cdot (x_Q; y_Q) &= (r_P \cdot \cos(\varphi_P); r_P \cdot \sin(\varphi_P)) \cdot (r_Q \cdot \cos(\varphi_Q); r_Q \cdot \sin(\varphi_Q)) = \\ &= (r_P \cos(\varphi_P) \cdot r_Q \cos(\varphi_Q) - r_P \sin(\varphi_P) \cdot r_Q \sin(\varphi_Q); r_P \cos(\varphi_P) \cdot r_Q \sin(\varphi_Q) + r_Q \cos(\varphi_Q) \cdot r_P \sin(\varphi_P)) = \\ &= (r_P \cdot r_Q \cdot \cos(\varphi_P + \varphi_Q); r_P \cdot r_Q \cdot \sin(\varphi_P + \varphi_Q)). \end{aligned}$$

Die Komplex-Multiplikation hat also folgende

Grundeigenschaft: Zum Produkt $P \cdot Q$ gehört das Polarkoordinatenpaar $(r_p \cdot r_Q | \varphi_p + \varphi_Q)$.

Diese Grundeigenschaft macht die Komplex-Multiplikation geometrisch interessant. Denn sie hat zur Folge, dass die Abbildung $P \rightarrow P \cdot Q$ die Drehstreckung mit dem Streckungsfaktor r_Q und dem Drehwinkel φ_Q beschreibt, die N als Fixpunkt hat. (Eine Drehstreckung ist eine Hintereinanderschaltung einer Streckung und einer Drehung.)

Man verwendet an Stelle des Terms $r_p \cdot \cos(\varphi_p) + r_p \cdot \sin(\varphi_p) \cdot I$ im Anschluss an Leonhard Euler (1707-1783) auch den Term $r_p \cdot e^{i\varphi_p}$, denn nach den Potenzgesetzen gilt dann entsprechend der Grundeigenschaft $P \cdot Q = r_p \cdot e^{i\varphi_p} \cdot r_Q \cdot e^{i\varphi_Q} = r_p \cdot r_Q \cdot e^{i(\varphi_p + \varphi_Q)}$.

Ein weiterer geometrischer Aspekt ergibt sich aus der Spiegelung eines Punktes P an der x-Achse. Das Spiegelbild $\bar{P} = (x_p | -y_p)$ wird 'konjugiert komplex' zu P genannt. Dabei gelten die Rechenregeln: $\overline{P+Q} = \bar{P} + \bar{Q}$ und $\overline{P \cdot Q} = \bar{P} \cdot \bar{Q}$. Es ist $r_{\bar{P}} = r_P$ und $\varphi_{\bar{P}} = -\varphi_P$. Das Produkt $P \cdot \bar{P}$ ist der Punkt $(x_p^2 + y_p^2 | 0)$, wobei $x_p^2 + y_p^2$ das Quadrat des Betrags r_p von P ist. Wenn der Betrag 1 ist, ergibt sich für $P \cdot \bar{P}$ der Punkt $E = (1 | 0)$. Für beliebiges P ist $\frac{1}{r_p^2} \cdot \bar{P}$ das multiplikativ-inverse Element zu P , da $\frac{1}{r_p^2} \cdot \bar{P} \cdot P = E$ ist.

Hilfssatz 1: 1. Für jeden Punkt P gilt: $\text{Re}(P) = 0,5 \cdot (P + \bar{P})$ und $\text{Im}(P) = -0,5 \cdot (P - \bar{P}) \cdot I$.

2. Für reelle Zahlen r, s ist $\text{Re}(r \cdot P + s \cdot Q) = r \cdot \text{Re}(P) + s \cdot \text{Re}(Q)$ und

$$\text{Im}(r \cdot P + s \cdot Q) = r \cdot \text{Im}(P) + s \cdot \text{Im}(Q)$$

3. $\text{Re}(\bar{P}) = \text{Re}(P)$ und $\text{Im}(\bar{P}) = -\text{Im}(P)$

4. $\text{Re}(P)$ ist genau dann Null, wenn es einen Punkt X gibt mit $P = X - \bar{X}$.

5. $\text{Im}(P)$ ist genau dann Null, wenn es einen Punkt X gibt mit $P = X + \bar{X}$.

Beweis: 1. $P + \bar{P} = (x_p | y_p) + (x_p | -y_p) = (2 \cdot x_p | 0) = 2 \cdot (x_p | 0)$ und

$$(P - \bar{P}) \cdot I = ((x_p | y_p) - (x_p | -y_p)) \cdot I = (0 | 2 \cdot y_p) \cdot (0 | 1) = (-2 \cdot y_p | 0) = -2 \cdot (y_p | 0).$$

2. folgt aus $r \cdot P + s \cdot Q = r \cdot (\text{Re}(P) + \text{Im}(P) \cdot I) + s \cdot (\text{Re}(Q) + \text{Im}(Q) \cdot I) =$

$$r \cdot \text{Re}(P) + s \cdot \text{Re}(Q) + (r \cdot \text{Im}(P) + s \cdot \text{Im}(Q)) \cdot I.$$

3. folgt aus der Gleichung $\bar{P} = \text{Re}(P) - \text{Im}(P) \cdot I$.

4. $P = 0,5 \cdot (P + \bar{P}) + 0,5 \cdot (P - \bar{P})$. Wenn $\text{Re}(P)$ Null ist, dann ist $P = X - \bar{X}$ mit

$X = 0,5 \cdot P$. Wenn es einen Punkt X mit $P = X - \bar{X}$ gibt, ist

$$\text{Re}(P) = 0,5 \cdot (X - \bar{X} + \overline{X - \bar{X}}) = 0,5 \cdot (X - \bar{X} + \bar{X} - X) = 0$$

5. Wenn $\text{Im}(P)$ Null ist, dann gilt $P = \bar{P}$, also $P = X + \bar{X}$ für $X = 0,5 \cdot P$. Wenn es

umgekehrt einen Punkt X gibt mit $P = X + \bar{X}$, dann ist

$$\text{Im}(P) = -0,5 \cdot (X + \bar{X} - \overline{X + \bar{X}}) \cdot I = 0,5 \cdot (X + \bar{X} - X - \bar{X}) \cdot I = 0$$

□

Hilfssatz 2: P und Q seien beliebige Punkte. Dann ist $\arg(P \cdot \overline{Q})$ gleich $\varphi_P - \varphi_Q$. Der Realteil von $P \cdot \overline{Q}$ ist $x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q = r_P \cdot r_Q \cdot \cos(\varphi_P - \varphi_Q)$ und der Imaginärteil $y_P \cdot x_Q - x_P \cdot y_Q = r_P \cdot r_Q \cdot \sin(\varphi_P - \varphi_Q)$.

Der Beweis ergibt sich aus der Grundeigenschaft, der Definition der Multiplikation und daraus, dass $C = (r_C \cdot \cos(\varphi_C) \mid r_C \cdot \sin(\varphi_C))$ für jeden Punkt C gilt, also auch für $C = P \cdot \overline{Q}$.

Der Realteil von $P \cdot \overline{Q}$ ist nach Hilfssatz 2 das Skalarprodukt der Vektoren \overrightarrow{NQ} und \overrightarrow{NP} , der Imaginärteil ist die daraus (in dieser Reihenfolge) gebildete Determinante. Geometrisch gedeutet ist der Imaginärteil das Doppelte des orientierten Flächeninhalts vom Dreieck NQP .

Definition: Für Punkte $P, Q \neq R$ wird definiert: $\angle QRP := \arg((P-R) \cdot \overline{(Q-R)})$

$\angle QRP$ ist also der Wert $\varphi_{P-R} - \varphi_{Q-R}$ des Maßes vom orientierten Winkel QRP . Es ist $\angle PRQ = \arg((Q-R) \cdot \overline{(P-R)}) = -\arg((Q-R) \cdot \overline{(P-R)}) = -\arg((P-R) \cdot \overline{(Q-R)}) = -\angle QRP$.

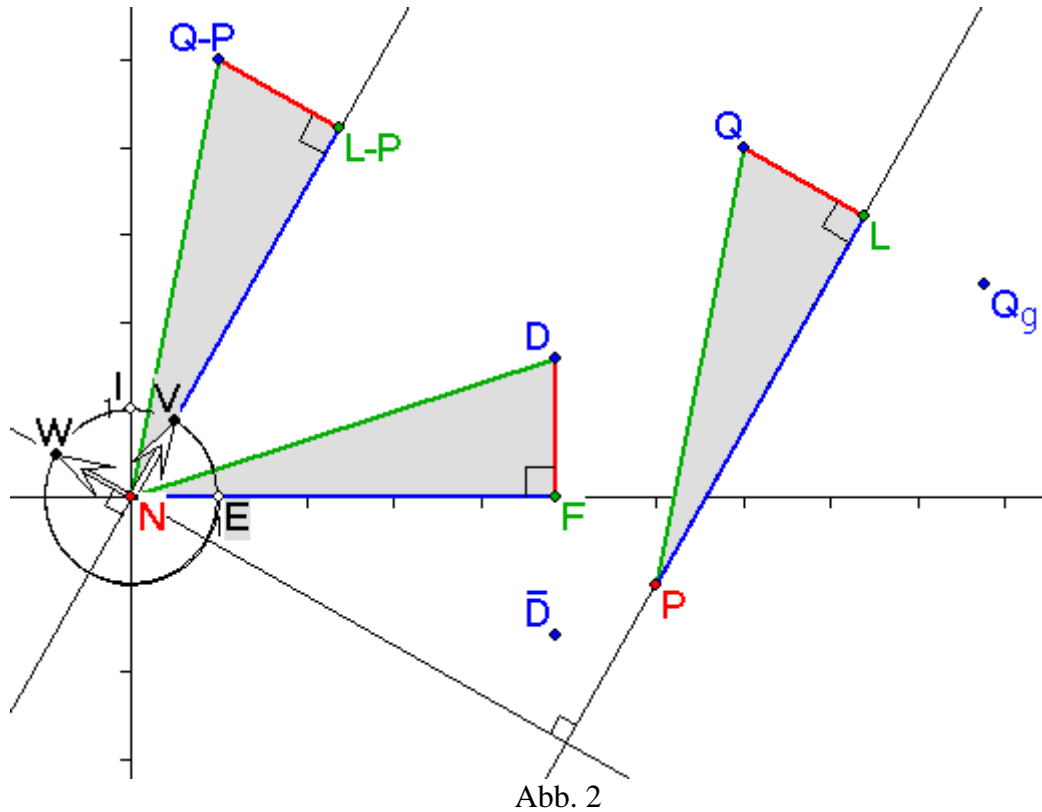
Hilfssatz 3: Die Gerade g durch A und B ($\neq A$) steht senkrecht auf der Geraden h durch C und D ($\neq C$) genau dann, wenn $\operatorname{Re}((B-A) \cdot \overline{(D-C)}) = 0$ ist.

Beweis: Die Gerade durch N und den Punkt $B-A$ ist nämlich parallel zu g , und die durch N und den Punkt $D-C$ parallel zu h . Die Behauptung folgt darum aus Hilfssatz 2, da g und h genau dann senkrecht zueinander stehen, wenn $\cos(\varphi_{B-A} - \varphi_{D-C}) = 0$ ist. \square

Nach Hilfssatz 3 und 1 sind g und h also genau dann orthogonal, wenn es einen Punkt X gibt mit $(B-A) \cdot \overline{(D-C)} = X - \overline{X}$.

Hilfssatz 4: P, Q und V seien Punkte der komplexen Ebene. Es sei $r_V = 1$, g die Parallele zu NV durch P , $W = V \cdot I$ und $D = (Q-P) \cdot \overline{V}$. L sei der Fußpunkt des Lots von Q auf g . Dann gilt:

1. Der Betrag des Realteils von D , nämlich $\left| 0,5 \cdot ((\overline{Q}-\overline{P}) \cdot V + (Q-P) \cdot \overline{V}) \right|$ ist der Abstand des Punktes L von P . Der Betrag des Imaginärteils von D ist der Abstand des Punktes Q von g .
2. Der Betrag des Realteils von $(Q-P) \cdot \overline{W}$ ist der Abstand, den Q von g hat. Der Betrag des Imaginärteils von $(Q-P) \cdot \overline{W}$ ist der Abstand des Punktes L von P .
3. $L = 0,5 \cdot (Q+P + (\overline{Q}-\overline{P}) \cdot V^2) = 0,5 \cdot (Q+P - (\overline{Q}-\overline{P}) \cdot W^2)$
4. Das Bild von Q bei Spiegelung an g ist $Q_g = (\overline{Q}-\overline{P}) \cdot V^2 + P = -(\overline{Q}-\overline{P}) \cdot W^2 + P$



Beweis: 1. Die Abbildung $X \rightarrow X - P$ ist die Verschiebung, die P in N überführt, Q in $Q - P$ und L in $L - P$. Die Abbildung $X \rightarrow X \cdot \bar{V}$ ist eine Drehung um N , die V in E dreht. Darum wird das Dreieck PLQ durch die Abbildung $X \rightarrow (X - P) \cdot \bar{V}$ in ein dazu kongruentes Dreieck NFD abgebildet, dessen Kathete NF auf der x-Achse liegt. Der Abstand, den P von L hat, ist darum der Abstand F von N , also der Betrag des Realteils von D , nämlich $|F| = |0,5 \cdot (D + \bar{D})|$.

Der Betrag des Imaginärteils von D ist entsprechend der Abstand des Punktes Q von L .

2. Wegen $\bar{I} \cdot I = I \cdot \bar{I} = 1$ ist $\bar{W} \cdot I = \bar{V} \cdot \bar{I} \cdot I = \bar{V}$, also

$$D = (Q - P) \bar{W} \cdot I = \operatorname{Re}((Q - P) \bar{W}) \cdot I + \operatorname{Im}((Q - P) \bar{W}) \cdot I^2 = -\operatorname{Im}((Q - P) \bar{W}) + \operatorname{Re}((Q - P) \bar{W}) \cdot I.$$

Der Betrag des Realteils bzw. Imaginärteils von D stimmt also mit dem des Imaginärteils bzw. Realteils von $(Q - P) \cdot \bar{W}$ überein.

3. Die Drehung $X \rightarrow X \cdot V$ dreht F in $L - P$.

Darum ist $L - P = 0,5 \cdot (D + \bar{D}) \cdot V$, also wegen $V \cdot \bar{V} = 1$

$$L = 0,5 \cdot ((Q - P) \cdot \bar{V} + (\bar{Q} - \bar{P}) \cdot V) \cdot V + P = 0,5 \cdot (Q + P + (\bar{Q} - \bar{P}) \cdot V^2).$$

$$\text{Wegen } W^2 = -V^2 \text{ ist dann } L = 0,5 \cdot (Q + P - (\bar{Q} - \bar{P}) \cdot W^2).$$

$$4. \quad Q_g = \bar{D} \cdot V + P = (\bar{Q} - \bar{P}) \cdot V^2 + P \quad \text{und} \quad W^2 = V^2 \cdot I^2 = -V^2. \quad \square$$

Hilfssatz 4 ermöglicht es, mit Hilfe von W einen signierten Abstand von einer orientierten Geraden g einzuführen, also einen Abstand, die auch negativ sein kann.

Definition: g sei die Gerade durch einen Punkt P , die senkrecht zu dem Vektor \overline{NW} mit der Länge 1 verläuft. Dann sei der signierte Abstand des Punktes Q von g definiert durch

$$|Q; P, W|^{\pm} := \operatorname{Re}((Q - P) \cdot \bar{W}) = 0,5 \cdot ((Q - P) \cdot \bar{W} + (\bar{Q} - \bar{P}) \cdot W).$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl des Punktes P auf g . Durch die Angabe des Normalenvektors W wird hier eine Orientierung der Geraden g festgelegt, bei der die Punkte auf der Seite von g , zu der W hinzeigt, einen positiven Abstand haben, und auf der anderen Seite einen negativen. Wir bezeichnen im Folgenden diese orientierte Gerade mit $g(P;W)$. Ein Punkt Q liegt genau dann auf der Geraden $g(P;W)$, wenn $\operatorname{Re}((Q-P)\cdot\overline{W})=0$ ist.

Definition: Für einen Punkt L auf $g(P;W)$ definieren wir durch $|L;P,W|_l^\pm := -\operatorname{Im}((L-P)\overline{W})$ einen signierten Abstand von P .

$|L;P,W|_l^\pm$ ist genau dann positiv, wenn bei einer Bewegung auf der Geraden $g(P;W)$ von P nach L der Vektor \overline{NW} nach links zeigt. Da die Gerade NW senkrecht zu PL verläuft, ist nach Hilfssatz 3 $\operatorname{Re}((L-P)\overline{W})=0$, folglich $(L-P)\overline{W}$ das Produkt einer reellen Zahl mit I . Wenn Q auf der Geraden liegt, die senkrecht zu $g(P;W)$ steht und durch L verläuft, dann ist wegen $\operatorname{Im}((Q-P)\overline{W}) - \operatorname{Im}((L-P)\overline{W}) = \operatorname{Im}((Q-L)\overline{W}) = 0$ der signierte Abstand $|L;P,W|_l^\pm = -\operatorname{Im}((Q-P)\overline{W})$,

Hilfssatz 5: U und V seien Punkte mit dem Betrag 1. g sei die Mittelsenkrechte von UV , falls $U \neq V$, und andernfalls die Ursprungsgerade durch U . g_P sei die Parallele zu g durch den Punkt P . Dann gilt:

1. Die Abbildung $X \rightarrow \overline{X} \cdot U \cdot V$ ist die Spiegelung an g .
2. Die Abbildung $X \rightarrow (\overline{X} - \overline{P}) \cdot U \cdot V + P$ ist die Spiegelung an g_P .

Beweis: 1. Bezeichnet Y den Punkt $\overline{X} \cdot U \cdot V$, so ist $\varphi_Y = -\varphi_X + \varphi_U + \varphi_V$, also

$\varphi_Y - \varphi_V = -(\varphi_X - \varphi_U)$. Die Ursprungshalbgeraden durch X und Y liegen darum spiegelbildlich zu g . Da $r_Y = r_X \cdot r_U \cdot r_V = r_X$ ist, liegen auch X und Y selbst spiegelbildlich zu g .

2. Die Spiegelung an g_P ergibt sich durch Hintereinanderschaltung der Abbildungen $X \rightarrow X - P$, $X \rightarrow \overline{X} \cdot U \cdot V$ und $X \rightarrow X + P$. □

Die Spiegelung an g_P ist die Spiegelung an einer Winkelhalbierenden der Geraden $g(P;U)$ und $g(P;V)$, Diese Winkelhalbierende ist auch eine Winkelhalbierende der dazu senkrechten Geraden $g(P;U \cdot I)$ und $g(P;V \cdot I)$.

Die Punkte P auf einer Geraden AB (mit $A \neq B$) sind genau die Punkte, für die es eine Zahl s gibt, so dass $P = A + s \cdot (B - A)$, also $P = (1-s) \cdot A + s \cdot B$ gilt. P liegt also genau dann auf der Geraden AB , wenn es Zahlen r, s mit $r + s = 1$ gibt, so dass $P = r \cdot A + s \cdot B$ gilt. Dabei sind r und s eindeutig durch P, A und B bestimmt. Es ist $P - A = s \cdot (B - A)$ und $B - P = (1-s) \cdot B - r \cdot A = r \cdot (B - A)$. Das Verhältnis der Abstände des Punktes P von A und B ist darum durch das Verhältnis von r und s gegeben. Die Punkte zwischen A und B sind genau die Punkte, für die $0 \leq s \leq 1$ gilt, also r und s beide größergleich Null sind.

Um auch die Vorzeichen von r und s zu berücksichtigen, beschreiben wir die Lage eines Punktes P auf der Geraden AB durch das ‚signierte‘ Teilverhältnis.

Definition: $\vartheta(A, B, P) = \pm \frac{|BP|}{|AP|}$ ist das mit einem Vorzeichen versehene Verhältnis der

Abstände des Punktes P von B und A . Dabei benutzen wir das Plus-Zeichen, wenn P zwischen A und B liegt, und sonst das Minus-Zeichen.

Für $P = r \cdot A + s \cdot B$ mit $r + s = 1$ und $s \neq 0$ ist $\vartheta(A, B, P) = \frac{r}{s}$. Dieses Teilverhältnis beschreiben wir auch durch $r : s$ oder durch $r \cdot k : s \cdot k$ mit einer beliebigen Zahl $k \neq 0$.

Die wichtigsten Werte von $\vartheta(A, B, P)$ sind die Teilverhältnisse $1, 2, -2, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$:

- Teilverhältnis $\vartheta(A, B, P) = 1$: P ist der Mittelpunkt $0,5 \cdot A + 0,5 \cdot B$ der Strecke AB .
- Teilverhältnis 2 : P ist dann der Punkt $\frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B$ zwischen A und B , der von B doppelt so weit entfernt ist wie von A . (Beispiel: S auf WC in Abb. 1)
- Teilverhältnis -2 : P ist dann der Punkt $2 \cdot A - B$, der durch Spiegelung von B an A entsteht.
- Teilverhältnis $0,5$: P ist dann der Punkt $\frac{1}{3} \cdot (A + 2 \cdot B)$ zwischen A und B , der von A doppelt so weit entfernt ist wie von B .
- Teilverhältnis $-0,5$: P ist dann der Punkt $-A + 2 \cdot B$, der durch Spiegelung von A an B entsteht.

Hierbei ist zu beachten, dass die Summe der Vorzeichen von A und B stets 1 ist.

1. Der Neun-Punkte-Kreis

Abbildung 1 zeigt den Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks ABC . Bei algebraischen Untersuchungen zum Dreieck gibt man üblicherweise Eckpunkten A, B und C vor und berechnet daraus andere Punkte. Zur Anwendung der komplexen Rechenoperationen auf den Neun-Punkte-Kreis gehen wir dagegen von den Punkten U, V und W auf dem Einheitskreis um N aus, die in Abbildung 1 die Seitenmitten von ABC sind. Der Radius unseres Neun-Punkte-Kreises beträgt also 1 und der Betrag der Punkte U, V und W ist folglich ebenfalls 1 .

Die folgenden Rechnungen benutzen U, V und W als Variablen, wobei wir voraussetzen, dass das Dreieck UVW nicht ausgeartet und nicht rechtwinklig ist.

Satz 1: Wir definieren $H := U + V + W$ und $S := \frac{1}{3} \cdot H$.

Dann ist H der Höhenschnittpunkt und S der Schwerpunkt des Dreiecks UVW .

Die Abbildung $\sigma : Z \rightarrow -2Z + H$ ist die Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor -2 .

Beweis: Aus $(H - W) \cdot \overline{(U - V)} = (U + V) \cdot \overline{(U - V)} = E + V\bar{U} - U\bar{V} - E = V\bar{U} - U\bar{V}$ folgt nach Hilfssatz 1 $\operatorname{Re}((H - W) \cdot \overline{(U - V)}) = 0$, da $U\bar{V}$ zu $V\bar{U}$ konjugiert komplex ist.

Nach Hilfssatz 3 sind darum die Geraden HW und UV orthogonal.

Aus $-2 \cdot (Z - S) = -2 \cdot Z + 3 \cdot S - S = \sigma(Z) - S$ folgt, dass σ Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor -2 ist.

Wegen $\sigma(0,5 \cdot (V + W)) = \sigma(0,5 \cdot (H - U)) = -(H - U) + H = U$ teilt S die Strecke zwischen U und der Mitte $0,5 \cdot (V + W)$ von der Seite VW im Verhältnis $1:2$. Darum ist S der Schwerpunkt des Dreiecks UVW . □

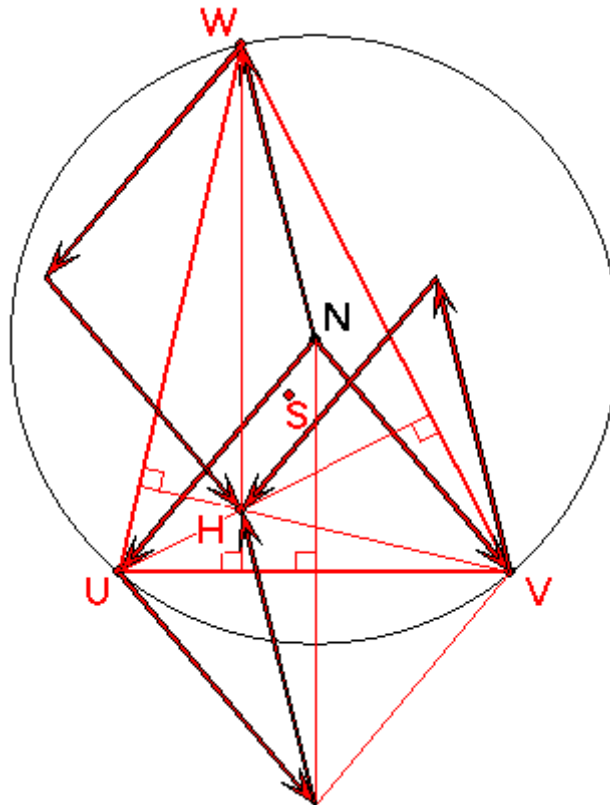


Abb. 3

Definition : σ sei im Folgenden stets die Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor -2 . Wir definieren $A := \sigma(U) = -U + V + W$, $B := \sigma(V) = U - V + W$, $C := \sigma(W) = U + V - W$ und $D := \sigma(H) = -U - V - W$. Die Vorzeichen-Kombinationen $-++$, $+-+$, $++-$ und $---$ nennen wir die ‚Signaturen‘ von A bzw. B bzw. C bzw. D .

Für die Eckpunkte U' , V' und W' des Höhenfußpunkt-Dreiecks von ABC definieren wir analog:

Es sei σ' die Streckung mit dem Zentrum $S' := \frac{1}{3}(U' + V' + W')$ und dem Faktor -2 und $A' := \sigma'(U') = -U' + V' + W'$, $B' := \sigma'(V') = U' - V' + W'$, $C' := \sigma'(W') = U' + V' - W'$ und $D' := \sigma'(H') = -U' - V' - W'$.

Die Punktmenge $\{U, V, W, H\}$ hat die besondere Eigenschaft, dass zwei der vier Punkte stets senkrecht auf der Verbindungsgeraden der andern beiden Punkte steht. Wir nennen eine derartige Punktmenge 'orthozentrierte Vierpunktmenge'. Da Streckungen die Orthogonalität erhalten, ist auch $\{A, B, C, D\}$ orthozentriert.

Bei der Streckung σ verdoppeln sich die Längen; darum ist der Umkreisradius von ABC doppelt so groß wie der vom Einheitskreis. Wegen $\sigma(N) = -2 \cdot N + H = H$ ist H der Umkreismittelpunkt von ABC .

Aus $0,5 \cdot (A + B) = 0,5 \cdot (-U + V + W + U - V + W) = W$ folgt, dass W der Mittelpunkt von AB ist. Entsprechendes gilt für V und U . Aus $0,5 \cdot (C + D) = 0,5 \cdot (U + V - W - U - V - W) = -W$ folgt, dass $-W$ Mittelpunkt von CD ist. Dieser Punkt liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis von ABC , weil $-W$ durch Spiegelung von W an N entsteht. Dieser Kreis enthält nach dem Satz von Thales auch der Fußpunkt W' des Lots von C auf AB . Entsprechendes gilt für U' und V' .

Alle neun Punkte $U, V, W, -U, -V, -W, U', V'$ und W' liegen also auf dem Neun-Punkte-Kreis von ABC . Die Punkte H, S, N und D liegen auf der 'Euler-Geraden' von ABC .

2. Das Höhenfußpunkt-Dreieck $U'V'W'$

Definition :

$$\rho_A := -1 - \cos(\varphi_V - \varphi_W) + \cos(\varphi_W - \varphi_U) + \cos(\varphi_U - \varphi_V)$$

$$\rho_B := -1 + \cos(\varphi_V - \varphi_W) - \cos(\varphi_W - \varphi_U) + \cos(\varphi_U - \varphi_V),$$

$$\rho_C := -1 + \cos(\varphi_V - \varphi_W) + \cos(\varphi_W - \varphi_U) - \cos(\varphi_U - \varphi_V) \text{ und}$$

$$\rho_D := -1 - \cos(\varphi_V - \varphi_W) - \cos(\varphi_W - \varphi_U) - \cos(\varphi_U - \varphi_V).$$

Die Vorzeichen der Kosinusfunktionen entsprechen hier der Signatur von A, B, C und D . In anderer Darstellung ist

$$\rho_A = \operatorname{Re}(-1 - V\bar{W} + W\bar{U} + U\bar{V}), \quad \rho_B = \operatorname{Re}(-1 + V\bar{W} - W\bar{U} + U\bar{V})$$

$$\rho_C = \operatorname{Re}(-1 + V\bar{W} + W\bar{U} - U\bar{V}), \quad \rho_D = \operatorname{Re}(-1 - V\bar{W} - W\bar{U} - U\bar{V}).$$

Die Summe dieser Zahlen ist $\rho_A + \rho_B + \rho_C + \rho_D = -4$. In Satz 2 wird gezeigt, dass von den vier Zahlen genau eine positiv ist.

Definition : Der Fußpunkt des Lots von einem Punkt P auf die Seitengerade $g(W',U)$ bzw. $g(U',V)$ bzw. $g(V',W)$ des Dreiecks $U'V'W'$ sei mit $L(P,U)$ bzw. $L(P,V)$ bzw. bzw. $L(P,W)$ bezeichnet.

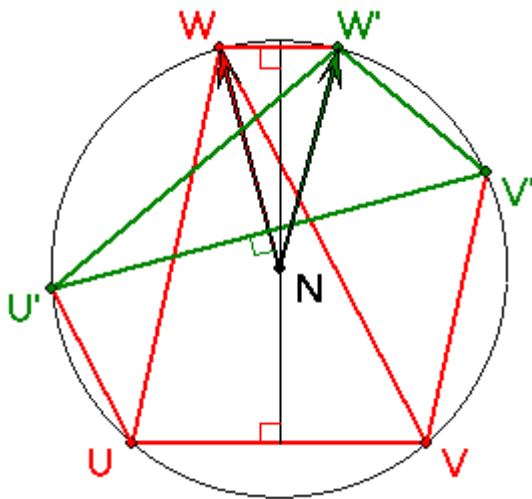


Abb. 4

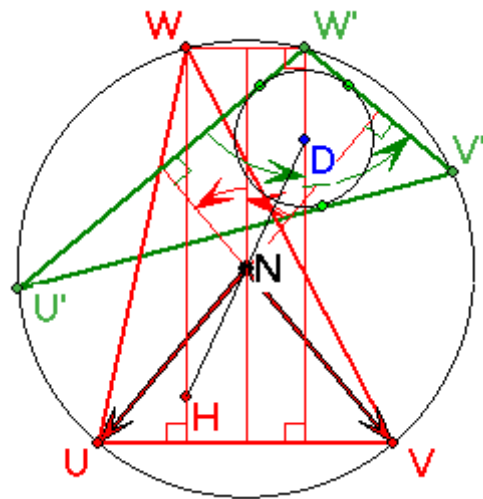


Abb. 5

Satz 2: 1. $W' = \bar{W} \cdot U \cdot V$, $V' = \bar{V} \cdot W \cdot U$ und $U' = \bar{U} \cdot V \cdot W$.

2. Die Gerade $U'V'$ bzw. $V'W'$ bzw. $W'U'$ steht senkrecht zur Geraden NW bzw. NU bzw. NV . Das Dreieck $U'V'W'$ ist nicht ausgeartet (unter unserer Voraussetzung, dass UVW nicht rechtwinklig ist.)
3. A, B, C und D sind die Zentren der Berührungskreise des Dreiecks $U'V'W'$. Einer dieser Punkte liegt innerhalb des Einheitskreises, die drei anderen außerhalb.
4. $\rho_A = |A; W', U|^{\pm}$ und $r_A^2 = 1 - 2 \cdot \rho_A$, $\rho_B = |B; U', V|^{\pm}$ und $r_B^2 = 1 - 2 \cdot \rho_B$,
 $\rho_C = |C; V', W|^{\pm}$ und $r_C^2 = 1 - 2 \cdot \rho_C$, $\rho_D = |D; W', U|^{\pm}$ und $r_D^2 = 1 - 2 \cdot \rho_D$.

Für $P \in \{A, B, C, D\}$ ist ρ_P oder $-\rho_P$ Berührkreisradius, je nachdem, ob P In- oder Ankreis-Mittelpunkt ist.

5. $L(A, U) = A - \rho_A \cdot U$, $L(A, V) = A + \rho_A \cdot V$ und $L(A, W) = A + \rho_A \cdot W$.
 $L(B, U) = B + \rho_B \cdot U$, $L(B, V) = B - \rho_B \cdot V$ und $L(B, W) = B + \rho_B \cdot W$.
 $L(C, U) = C + \rho_C \cdot U$, $L(C, V) = C + \rho_C \cdot V$ und $L(C, W) = C - \rho_C \cdot W$.
 $L(D, U) = A - \rho_D \cdot U$, $L(D, V) = D - \rho_D \cdot V$ und $L(D, W) = D - \rho_D \cdot W$.
6. Für alle $P \in \{A, B, C, D\}$ ist $L(P, U) + L(P, V) + L(P, W) = (3 + \rho_P) \cdot P$.

Beweis:

1. Da die Gerade AB das Bild von UV bei der Streckung σ ist, sind AB und UV parallel. W und W' sind die Schnittpunkte des Einheitskreises mit AB . Die Mittelsenkrechte von UV ist darum auch Mittelsenkrechte von WW' . Nach Hilfssatz 5 ist darum $W' = \overline{W} \cdot U \cdot V$ und entsprechend $V' = \overline{V} \cdot W \cdot U$ und $U' = \overline{U} \cdot V \cdot W$.

2. Wegen $(U' - V')(\overline{W} - \overline{N}) = (U' - V')\overline{W} = (\overline{U} \cdot V \cdot W - U \cdot \overline{V} \cdot W) \cdot \overline{W} = (\overline{UV} - U\overline{V})W\overline{W} = \overline{UV} - U\overline{V}$ sind nach den Hilfssätzen 3 und 1 die Geraden $U'V'$ und NW orthogonal. Entsprechend ist $V'W'$ senkrecht zu NU und $W'U'$ senkrecht zu NV . Unter unserer Voraussetzung, dass UVW nicht rechtwinklig ist, sind die Geraden NW , NU und NV paarweise verschieden; darum fallen keine zwei der Punkte U' , V' , W' zusammen.

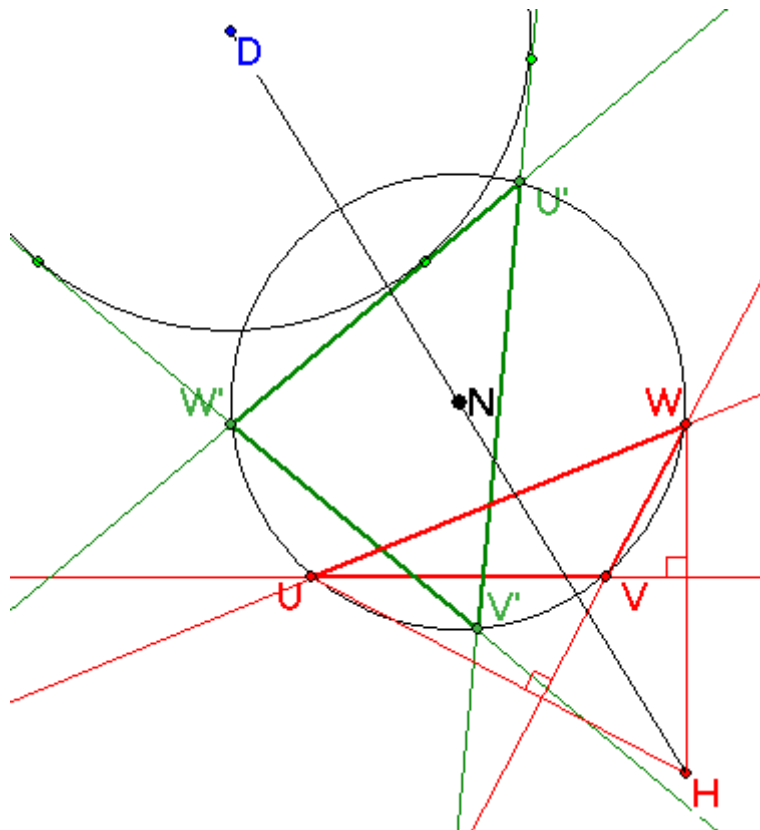


Abb. 6

3. Wegen $C - D = (U + V - W) - (-U - V - W) = 2 \cdot (U + V)$ ist die Ursprungsgerade durch $U + V$ parallel zur Geraden CD . Sie halbiert den Winkel UNV , da die Vektoren \overline{NU} und \overline{NV} eine Raute aufspannen. Da andererseits NU senkrecht zu $V'W'$ und NV senkrecht zu $W'U'$ ist, muss CD Winkelhalbierende vom Winkel $U'W'V'$ sein. Da Entsprechendes auch für die

Winkel bei U' und V' gilt, sind A, B, C und D Winkelhalbierendenschnittpunkte von $U'V'W'$, also In- oder Ankreismittelpunkte. Dabei liegt der Inkreis-Mittelpunkt innerhalb des Einheitskreises. (Abb. 6 zeigt, dass der Inkreis-Mittelpunkt nicht notwendig D ist; er ist nur dann gleich D , wenn N im Innern von UVW liegt.) Da je zwei Punkte in $\{A, B, C, D\}$ ihren Mittelpunkt auf dem Einheitskreis haben, können keine zwei im Innern des Einheitskreises liegen. Es kann auch kein Punkt von $\{A, B, C, D\}$ auf dem Einheitskreis liegen, da wir voraussetzen, dass UVW nicht rechtwinklig ist.

4. $(A - W') \cdot \bar{U} = (-U + V + W - U \cdot V \cdot \bar{W}) \cdot \bar{U} = -E + V \cdot \bar{U} + W \cdot \bar{U} - V \cdot \bar{W}$. Darum ist nach Hilfssatz 1 und 2

$|A; W', U|^{\pm} = \operatorname{Re}((A - W') \cdot \bar{U}) = -\operatorname{Re}(E) + \operatorname{Re}(V \cdot \bar{U}) + \operatorname{Re}(W \cdot \bar{U}) - \operatorname{Re}(V \cdot \bar{W}) = -1 - \cos(\varphi_V - \varphi_W) + \cos(\varphi_W - \varphi_U) + \cos(\varphi_U - \varphi_V) = \rho_A$ wegen der Symmetrie der Kosinus-Funktion.

$r_A^2 = A \cdot \bar{A} = (-U + V + W) \cdot (-\bar{U} + \bar{V} + \bar{W}) = 3 \cdot E - U \cdot \bar{V} - V \cdot \bar{U} + V \cdot \bar{W} + W \cdot \bar{V} - U \cdot \bar{W} - W \cdot \bar{U} = E - (A - W') \cdot \bar{U} - (\bar{A} - \bar{W}') \cdot U = E - 2 \cdot |A; W', U|^{\pm}$. Da der Betrag von $\rho_A = |A; W', U|^{\pm}$ der Berührungsradius zu A ist, kann ρ_A nur dann positiv sein, wenn A Inkreis-Zentrum ist, denn nur dann liegt A im Innern des Einheitskreises.

Die Aussagen für B, C und D ergeben sich entsprechend.

5. Aus $|A; W', U|^{\pm} = \rho_A$ folgt $\rho_A \cdot U = A - L(A, U)$, also $L(A, U) = A - \rho_A \cdot U$. Wegen $(A - W') \cdot \bar{V} = (-U + V + W - U \cdot V \cdot \bar{W}) \cdot \bar{V} = -U \cdot \bar{V} + E + W \cdot \bar{V} - U \cdot \bar{W}$ ist $|A; W', V|^{\pm} = -\rho_A$ und darum $L(A, V) = A + \rho_A \cdot V$. Die übrigen Gleichungen ergeben sich analog.

6. $L(A, U) + L(A, V) + L(A, W) = 3 \cdot A + \rho_A \cdot (-U + V + W) = (3 + \rho_A) \cdot A$. Für B, C und D schließt man entsprechend. \square

Hilfssatz 6 :

$$\begin{aligned} \rho_A &= 0,5 \cdot \bar{U} \cdot (\bar{V} + \bar{W}) \cdot (U - V) \cdot (U - W), & \rho_B &= 0,5 \cdot \bar{V} \cdot (\bar{U} + \bar{W}) \cdot (V - U) \cdot (V - W), \\ \rho_C &= 0,5 \cdot \bar{W} \cdot (\bar{U} + \bar{V}) \cdot (W - U) \cdot (W - V), & \rho_D &= -0,5 \cdot \bar{U} \cdot \bar{V} \cdot \bar{W} \cdot (U + V) \cdot (V + W) \cdot (W + U). \end{aligned}$$

Beweis :

$$\begin{aligned} \rho_A &= \operatorname{Re}(-1 - V\bar{W} + W\bar{U} + U\bar{V}) = 0,5 \cdot (-2 - V\bar{W} - W\bar{V} + W\bar{U} + U\bar{W} + U\bar{V} + V\bar{U}) \\ &= 0,5 \cdot \bar{U} \cdot (\bar{V} + \bar{W}) \cdot (U - V) \cdot (U - W) \text{ und entsprechend für die anderen signierten Radien. } \square \end{aligned}$$

ρ_D kann man auch in der Form $-0,5 \cdot \bar{U} \cdot (\bar{V} + \bar{W}) \cdot (U + V) \cdot (W + U)$ oder $-0,5 \cdot \bar{V} \cdot (\bar{W} + \bar{U}) \cdot (U + V) \cdot (V + W)$ oder $-0,5 \cdot \bar{W} \cdot (\bar{U} + \bar{V}) \cdot (V + W) \cdot (W + U)$ angeben.

Satz 3 : Sei $U_{TD} := \frac{2}{V + \bar{W}}$, $V_{TD} := \frac{2}{W + \bar{U}}$ und $W_{TD} := \frac{2}{U + \bar{V}}$.

Analog sei $U_{TA} := \frac{2}{-\bar{V} - \bar{W}}$, $V_{TA} := \frac{2}{-\bar{W} + \bar{U}}$ und $W_{TA} := \frac{2}{\bar{U} - \bar{V}}$.

σ_{TD} bzw. σ_{TA} sei die Abbildung $Z \rightarrow -\rho_D \cdot Z + D$ bzw. $Z \rightarrow -\rho_A \cdot Z + A$. Dann gilt:

1. σ_{TD} bzw. σ_{TA} ist die Streckung mit dem Faktor $-\rho_D$ bzw. $-\rho_A$ und dem Zentrum $\frac{D}{1+\rho_D}$ bzw. $\frac{A}{1+\rho_A}$. Sie bildet das Dreieck $U_{TD}V_{TD}W_{TD}$ bzw. $U_{TA}V_{TA}W_{TA}$ in das Dreieck $U'V'W'$ ab.
2. Die Seitengeraden von $U_{TD}V_{TD}W_{TD}$ bzw. $U_{TA}V_{TA}W_{TA}$ sind die Tangenten an den Einheitskreis in den Punkten U, V und W bzw. $U, -V$ und $-W$.
3. Die Geraden UU_{TD}, VV_{TD} und WW_{TD} schneiden sich im Punkt $Y := \frac{-D-U'-V'-W'}{4+\rho_D}$.
4. $\frac{Y-U}{U_{TD}-U} = \frac{-\rho_A}{4+\rho_D}$

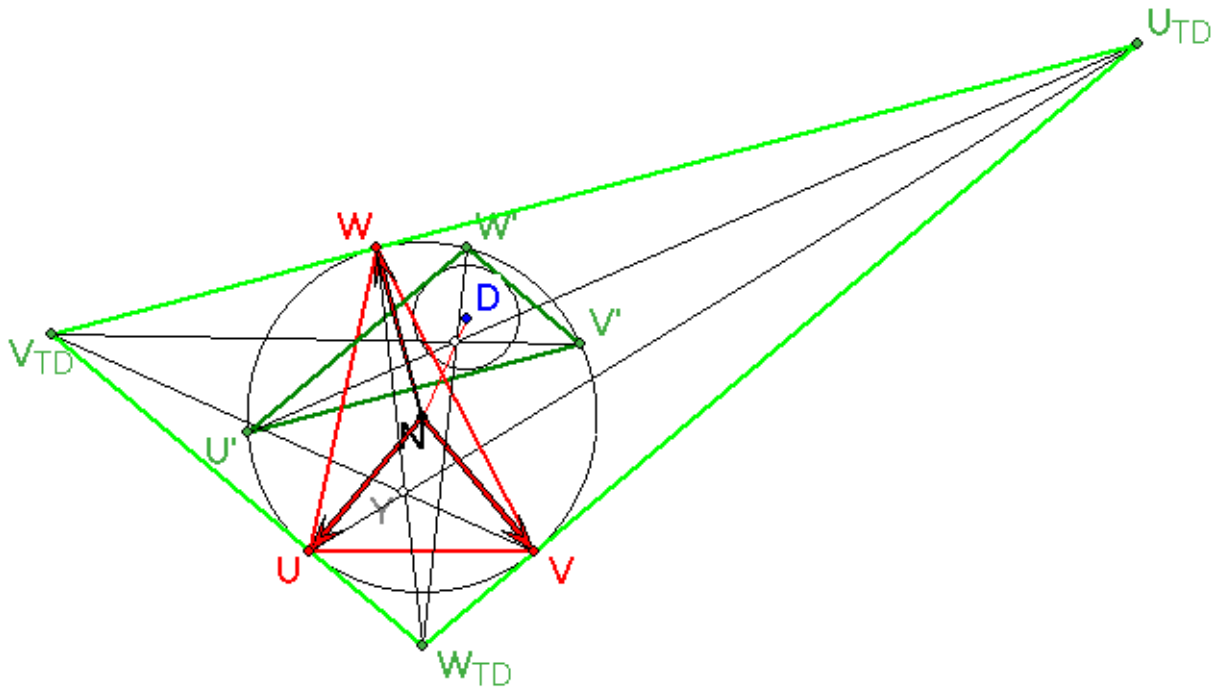


Abb. 7

Beweis : Wir führen den Beweis für σ_{TD} . Für σ_{TA} ergibt er sich bei Ersetzung von V durch $-V$ und W durch $-W$.

Wegen $-\rho_D \cdot Z + D - \frac{D}{1+\rho_D} = -\rho_D \cdot \left(Z - \frac{D}{1+\rho_D} \right)$ ist σ_{TD} die Streckung mit dem Faktor $-\rho_D$

und dem Zentrum $\frac{D}{1+\rho_D}$. Mit Hilfssatz 6 errechnet man

$$\sigma_{TD}(U_{TD}) = -\rho_D \cdot \frac{2}{\overline{V+W}} + D = \frac{\overline{U} \cdot \overline{V} \cdot \overline{W} \cdot (U+V) \cdot (V+W) \cdot (W+U)}{\overline{V+W}} + D$$

$$\frac{\overline{U} \cdot (U+V) \cdot (\overline{W} + \overline{V}) \cdot (W+U)}{\overline{V+W}} + D = \overline{U} \cdot (U+V) \cdot (W+U) - U - V - W = \overline{UVW} = U'$$

Entsprechende Rechnungen ergeben $\sigma_{TD}(V_{TD}) = V'$ und $\sigma_{TD}(W_{TD}) = W'$.

σ_{TD} bildet N in D ab und den Einheitskreis in den Kreis um D mit dem Radius ρ_D .

Da Streckungen Tangenten in Tangenten abbilden und die Seitengeraden von $U'V'W'$ Tangenten an den Kreis um D mit dem Radius ρ_D sind, müssen die Seitengeraden von $U_{TD}V_{TD}W_{TD}$ Tangenten an den Einheitskreis sein.

3. und 4. Um zu zeigen, dass Y auf UU_{TD} liegt, reicht es, die vierte Behauptung zu zeigen, da

$$\frac{-\rho_A}{4 + \rho_D} \text{ eine reelle Zahl ist. Dazu berechnen wir } -D - U' - V' - W' - U \cdot (4 + \rho_D) = \\ U + V + W - \overline{UVW} - \overline{UVW} - \overline{UVW} - 3 \cdot U + 0,5 \cdot (U^2 \overline{V} + V + UV \overline{W} + U \overline{VW} + W + U^2 \overline{W}) = \\ -2 \cdot U + 1,5 \cdot V + 1,5 \cdot W - \overline{UVW} - 0,5 \cdot U \overline{VW} - 0,5 UV \overline{W} + 0,5 \cdot U^2 \overline{V} + 0,5 \cdot U^2 \overline{W} = \\ -0,5 \cdot (U - V) \cdot (U - W) \cdot \overline{U} \cdot (2 - U \overline{V} - U \overline{W}).$$

Wegen $U_{TD} - U = \frac{2 - U \overline{V} - U \overline{W}}{\overline{V} + \overline{W}}$ folgt

$$\frac{-D - U' - V' - W' - U \cdot (4 + \rho_D)}{U_{TD} - U} = \frac{-0,5 \cdot (U - V) \cdot (U - W) \cdot \overline{U} \cdot (2 - U \overline{V} - U \overline{W}) \cdot (\overline{V} + \overline{W})}{2 - U \overline{V} - U \overline{W}} =$$

$$-0,5 \cdot (U - V) \cdot (U - W) \cdot \overline{U} \cdot (\overline{V} + \overline{W}) = -\rho_A. \text{ Daraus folgt die 4. Behauptung.}$$

Dass Y auch auf VV_{TD} und WW_{TD} zeigt man analog. \square

Entsprechende Aussagen wie für D und A in Satz 3 lassen sich auch für B und C angeben. Abbildung 7 zeigt, dass sich die Geraden $U'U_{TD}$, $V'V_{TD}$ und $W'W_{TD}$ in dem

Streckungszentrum $Z_{TD} = \frac{D}{1 + \rho_D}$ schneiden. Dabei ist $\vartheta(N, D, Z_{TD}) = \rho_D$.

Der Punkt Y wird als 'Symmedianpunkt' von UVW bezeichnet. Aus der 4. Behauptung folgt

$$\vartheta(U_{TD}, Y, U) = \frac{\rho_A}{4 + \rho_D}. \text{ Für die Teilverhältnisse auf } VV_{TD} \text{ und } WW_{TD} \text{ gelten entsprechende}$$

Aussagen.

In Abbildung 8 ist zu dem Dreieck ABC das Dreieck der Punkte $-A$, $-B$ und $-C$ gezeichnet, das durch Spiegelung der Eckpunkte am Koordinatenursprung N entsteht. Bei dieser Spiegelung geht das Orthozentrum D von ABC in das Orthozentrum H des gespiegelten Dreiecks über. Wegen $A - (-B) = A + B = -U + V + W + U - V + W = 2 \cdot W$ ist die

Verbindungsgerade von A und $-B$ parallel zum Vektor \overline{NW} , folglich senkrecht zur Geraden $U'V'$. Auf dieser Verbindungsgeraden liegt also der Fußpunkt des Lots von A auf $U'V'$. Der Fußpunkt ist nach Hilfssatz 4 der Punkt $L = 0,5 \cdot (A + V' - (A - V') \cdot W^2)$. Sein Abstand von A ist der Betrag von $\text{Re}((A - V') \cdot \overline{U})$, und sein Abstand von V' ist der Betrag von

$\text{Im}((A - V') \cdot \overline{W})$. Entsprechendes gilt für die anderen Lote von den Punkten A , B , C und D auf die Seitengeraden des Dreiecks $U'V'W'$.

Für verschiedene Punkte $P, Q \in \{A, B, C, D\}$ geht die Verbindungsgerade von P und $-Q$ durch Spiegelung an N in die von Q und $-P$ über. Darum liegen auf jeder Seitengeraden g des Dreiecks $U'V'W'$ die vier Fußpunkte der Lote von den Punkten in $\{A, B, C, D\}$ spiegelbildlich zur Lotgeraden zu g durch N .

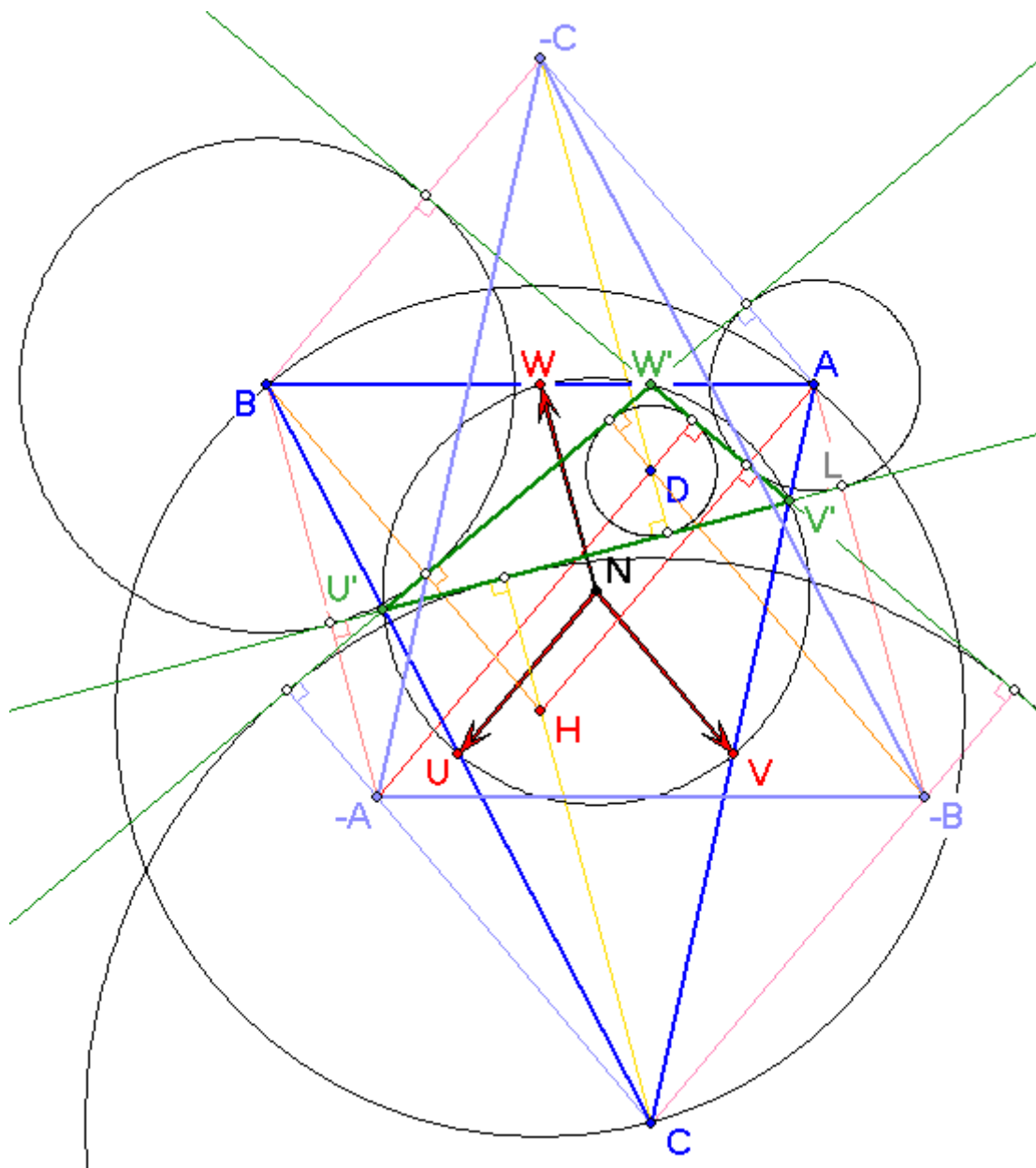


Abb. 8

Definition : Die signierten Abstände $|W';V',U|_l^\pm$, $|U';W',V|_l^\pm$ und $|V';U',W|_l^\pm$ der Eckpunkte des Dreiecks $U'V'W'$ seien im Folgenden mit u , v und w abgekürzt.

Satz 4 : 1. $u = 2 \cdot \text{Im}(W\bar{V}) = 2 \cdot \sin(\varphi_w - \varphi_v)$, $v = 2 \cdot \text{Im}(U\bar{W}) = 2 \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_w)$ und $w = 2 \cdot \text{Im}(V\bar{U}) = 2 \cdot \sin(\varphi_v - \varphi_u)$.

2. Für die Fußpunkte der Lote von D auf die Seitengeraden von $U'V'W'$ gilt:

$$|L(D,W);U',W|_l^\pm = 0,5 \cdot (-u + v + w),$$

$$|L(D,U);V',U|_l^\pm = 0,5 \cdot (u - v + w) \text{ und}$$

$$|L(D,V);W',V|_l^\pm = 0,5 \cdot (u + v - w)$$

Beweis : 1.

$$u = |W';V',U|_l^\pm = -\text{Im}((W' - V') \cdot \bar{U}) = -\text{Im}((UV\bar{W} - U\bar{V}W) \cdot \bar{U}) = \text{Im}(W\bar{V} - \bar{W}V) = 2 \cdot \text{Im}(W\bar{V}).$$

Dies ist gleich $2 \cdot \sin(\varphi_w - \varphi_v)$ nach Hilfssatz 2.

Die anderen beiden Gleichungen berechnet man analog.

$$2 \cdot |L(D, V); W', V|_I^\pm = -\operatorname{Im}((D - W') \cdot \bar{V}) = -\operatorname{Im}((-U - V - W - UV\bar{W}) \cdot \bar{V}) = \\ \operatorname{Im}(U\bar{V}) + \operatorname{Im}(E) + \operatorname{Im}(W\bar{V}) + \operatorname{Im}(U\bar{W}) = -\operatorname{Im}(V\bar{U}) + \operatorname{Im}(W\bar{V}) + \operatorname{Im}(U\bar{W}) = 0,5 \cdot (-w + u + v) \quad \square$$

Für die anderen Lotfußpunkte in Abbildung 8 lassen sich entsprechende Gleichungen wie in der 2. Behauptung zeigen. Sie unterscheiden sich nur in den Vorzeichen von u , v und w .

$2 \cdot \sin(\varphi_U - \varphi_w)$ ist nach der 1. Behauptung von Satz 4 der signierte Abstand der Punkte U' und W' auf der Geraden $g(W', V)$. Andererseits ist $\sin(\varphi_U - \varphi_w)$ auch der signierte Flächeninhalt des von den Vektoren \overline{NW} und \overline{NU} aufgespannten Parallelogramms. Folglich ist $|U'; W', V|_I^\pm$ viermal so groß wie der signierte Flächeninhalt des Dreiecks UNW .

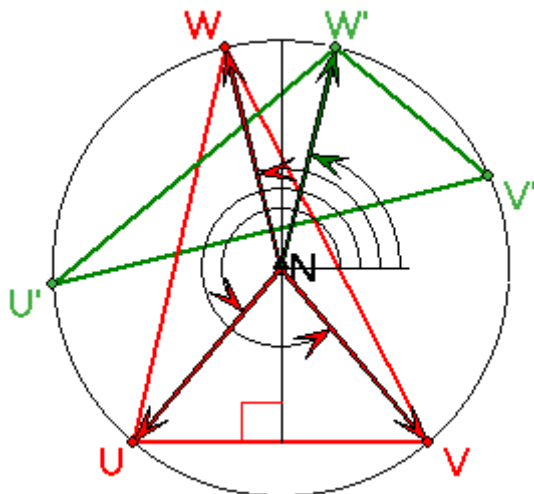


Abb. 9

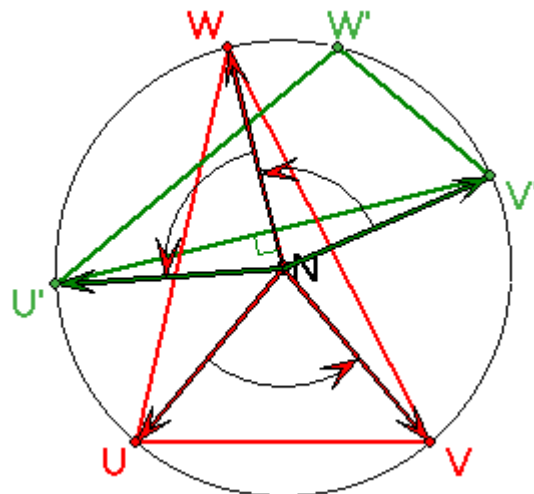


Abb. 10

In Abbildung 9 sind die Richtungswinkel (Argumente) der Punkte U , V , W und W' eingezeichnet. Es ist $\varphi_{W'} = \varphi_{U \cdot V \cdot \bar{W}} = \varphi_U + \varphi_V + \varphi_{\bar{W}} = \varphi_U + \varphi_V - \varphi_W$, also

$\varphi_{W'} + \varphi_W = \varphi_U + \varphi_V$. Die Winkelhalbierenden der Winkel $W'NW$ und UNV stimmen darum überein.

Abbildung 10 zeigt, dass der Wert des Winkelmaßes von $V'NU'$ doppelt so groß ist, wie der von UNV . Denn man errechnet $\varphi_{U'} - \varphi_{V'} = -\varphi_U + \varphi_V + \varphi_{W'} - (\varphi_U - \varphi_V + \varphi_W) = 2 \cdot (\varphi_V - \varphi_U)$. Eine dazu äquivalente Gleichung ist $\arg(U' \bar{V}') = 2 \cdot \arg(V\bar{U})$.

Wegen des Kreisumfangwinkelsatzes gibt es einen engen Zusammenhang zwischen den Winkeln UNV und $U'W'V'$. In Abbildung 10 ist $\angle UNV = 180^\circ - \angle U'W'V'$, bei anderer Lage von W auf dem Einheitskreis wie in Abbildung 11 ist $\angle UNV = -\angle U'W'V'$. Dabei ist in Abbildung 11 im Unterschied zu Abbildung 10 der signierte Abstand $|V'; W', U|_I^\pm$ positiv, da bei einer Bewegung von W' nach V' der Vektor \overline{NU} nach links zeigt. $|U'; W', V|_I^\pm$ ist in beiden Abbildungen positiv.

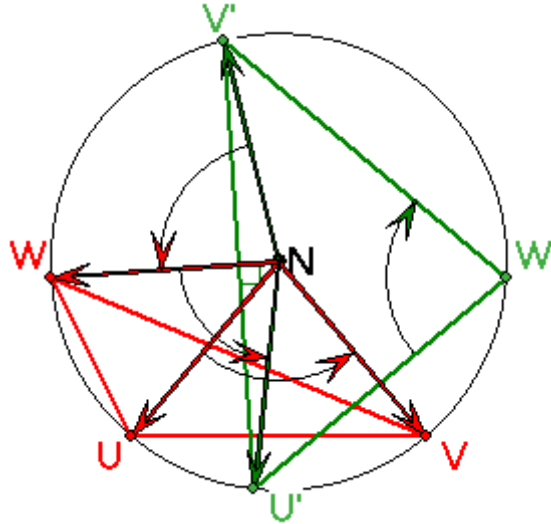


Abb. 11

Satz 5 :

1. $(U' - W') \cdot (\overline{V' - W'}) = |U'; W', V|_I^\pm \cdot |V'; W', U|_I^\pm \cdot V \cdot \overline{U}$
2. Wenn $|U'; W', V|_I^\pm \cdot |V'; W', U|_I^\pm > 0$ ist, dann ist $\angle UNV = \angle V'W'U' = -\angle U'W'V'$.
Wenn $|U'; W', V|_I^\pm \cdot |V'; W', U|_I^\pm < 0$ ist, dann ist $\angle UNV = 180^\circ - \angle U'W'V'$.

Beweis: 1. $|U'; W', V|_I^\pm \cdot |V'; W', U|_I^\pm \cdot V \cdot \overline{U} = 2 \cdot \text{Im}(U\overline{W}) \cdot 2 \cdot \text{Im}(V\overline{W}) \cdot V \cdot \overline{U} =$
 $(-(U\overline{W} - \overline{U}W) \cdot I) \cdot (-(V\overline{W} - \overline{V}W) \cdot I) \cdot V \cdot \overline{U} = -(U\overline{W} - \overline{U}W) \cdot (V\overline{W} - \overline{V}W) \cdot V \cdot \overline{U} =$
 $-V^2\overline{W}^2 + E + \overline{U}^2V^2 - \overline{U}^2\overline{W}^2 = (\overline{U}VW - UV\overline{W}) \cdot (\overline{U}V\overline{W} - \overline{U}\overline{V}W) = (U' - W') \cdot (\overline{V' - W'})$

2. folgt unmittelbar aus 1., da $\arg(-P) = 180^\circ + \arg(P)$ ist. □

3. Die Stern-Abbildung

Definition : Unter der Stern-Abbildung verstehen wir die Abbildung $Z \rightarrow Z^* = \overline{Z}^2 \cdot U \cdot V \cdot W$ auf der komplexen Ebene.

Ein Vergleich mit der Streckung $Z \rightarrow -2 \cdot Z + U + V + W$ mit dem Faktor -2 und dem Schwerpunkt von UVW als Zentrum zeigt, dass bei der Stern-Abbildung die Multiplikation die Rolle der Addition übernimmt.

Satz 6 : Die Stern-Abbildung hat folgende Eigenschaften:

1. Für alle Punkte P gilt $r_{P^*} = r_P^2$ und $\varphi_{P^*} = -2 \cdot \varphi_P + \varphi_U + \varphi_V + \varphi_W$.
2. Ist Q^* ein weiterer Bildpunkt, so ist $\varphi_{Q^*} - \varphi_{P^*} = 2 \cdot (\varphi_P - \varphi_Q)$. Im Fall $r_P = r_Q = 1$ ist der Abstand von P^* und Q^* gleich $|2 \cdot \text{Im}(P\overline{Q})|$.
3. Wenn P und Q punktsymmetrisch zu N sind, dann ist $P^* = Q^*$.
4. $U^* = U'$, $V^* = V'$ und $W^* = W'$. Außerdem ist $U^* \cdot V^* \cdot W^* = U \cdot V \cdot W$.
5. Die Stern-Bildpunkte A^* , B^* , C^* und D^* sind die Bilder von A , B , C und D bei der Streckung $\sigma': Z \rightarrow -2 \cdot Z + U' + V' + W'$ mit dem Faktor -2 und dem Schwerpunkt von $U'V'W'$ als Zentrum.

Beweis : 1. ergibt sich unmittelbar aus der Grundeigenschaft, da die Beträge von U , V und W gleich 1 sind.

$$2. \varphi_{Q^*} - \varphi_{P^*} = -2 \cdot \varphi_Q + \varphi_U + \varphi_V + \varphi_W - (-2 \cdot \varphi_P + \varphi_U + \varphi_V + \varphi_W) = 2 \cdot (\varphi_P - \varphi_Q).$$

Im Fall $r_P = r_Q = 1$ ist der Abstand von P^* und Q^*

$$2 \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{2}(\varphi_{Q^*} - \varphi_{P^*})\right) \right| = 2 \cdot \left| \sin(\varphi_Q - \varphi_P) \right| = \left| 2 \cdot \text{Im}(P\bar{Q}) \right|.$$

3. folgt daraus, dass $\overline{(-P)^2} = \overline{(-P)^2} = \overline{P^2} = \overline{P^2}$ ist.

$$4. U^* = \overline{U^2} \cdot U \cdot V \cdot W = \overline{U} \cdot V \cdot W = U' \text{ und } U^* \cdot V^* \cdot W^* = \overline{U} \cdot V \cdot W \cdot U \cdot \overline{V} \cdot W \cdot U \cdot V \cdot \overline{W} = U \cdot V \cdot W$$

$$5. A^* = (-\overline{U} + \overline{V} + \overline{W})^2 \cdot UVW = (\overline{U}^2 + \overline{V}^2 + \overline{W}^2 - 2\overline{U}\overline{V} + 2\overline{V}\overline{W} - 2\overline{U}\overline{W}) \cdot UVW \\ = \overline{U}VW + U\overline{V}W + UV\overline{W} - 2(W - U + V) = -2A + U' + V' + W'. \quad \square$$

Um die zweite Behauptung von Satz 6 so zu verschärfen, dass auch signierte Abstände erfasst werden, führen wir folgende Abkürzung ein:

Definition : $P \times Q := \overline{P \cdot Q} \cdot U \cdot V \cdot W$

Dann ist $P \times P = P^*$.

Hilfssatz 7 : P und Q seien Punkte auf dem Einheitskreis und $R := P \times Q$. Dann gilt:

1. Auch R liegt auf dem Einheitskreis und die Geraden NR und P^*Q^* stehen senkrecht aufeinander.

$$2. \left| P^*; Q^*, P \times Q \right|_I^\pm = 2 \cdot \text{Im}(P \cdot \overline{Q})$$

$$\text{Beweis: } 1. (P^* - Q^*) \cdot \overline{P \times Q} = (\overline{P^2} \cdot U \cdot V \cdot W - \overline{Q^2} \cdot U \cdot V \cdot W) \cdot P \cdot Q \cdot \overline{U} \cdot \overline{V} \cdot \overline{W} = \overline{P} \cdot Q - \overline{Q} \cdot P.$$

Darum ist nach Hilfssatz 1 der Realteil von $(P^* - Q^*) \cdot \overline{P \times Q}$ gleich Null und die erste Behauptung folgt aus Hilfssatz 3.

$$2. \left| P^*; Q^*, P \times Q \right|_I^\pm = -\text{Im}((P^* - Q^*) \cdot \overline{P \times Q}) = -\text{Im}(\overline{P} \cdot Q - \overline{Q} \cdot P) = 2 \cdot \text{Im}(P \cdot \overline{Q}) \quad \square$$

Definition : Unter $\text{Sign}(P)$ für $P \neq N$ verstehen wir den Punkt $\frac{1}{r_P} \cdot P$ auf dem Einheitskreis.

Statt $\text{Sign}(P)$ verwenden wir auch die Bezeichnung P_E (E für ‚Einheit‘).

Satz 7:

1. A^*, B^*, C^* und D^* sind die Berührungsmittelpunkte zum Dreieck

$$A' B' C' = \sigma'(U') \sigma'(V') \sigma'(W').$$

2. Sei $P \in \{A, B, C, D\}$ und $\rho_{P^*} := -2 \cdot \rho_P$. Dann ist $|\rho_{P^*}|$ der zu P^* gehörige

Berührungsradius und es gilt $r_{P^*} = 1 + \rho_{P^*}$ oder $r_{P^*} = 1 - \rho_{P^*}$. Falls $P^* \neq N$ ist, berührt

der zugehörigen Berührungskreis den Einheitskreis im Punkt P_E^* mit dem Richtungswinkel

$\varphi_{P^*} = -2\varphi_P + \varphi_U + \varphi_V + \varphi_W$. Im Fall $P^* = N$ fallen der Berührungskreis und der

Einheitskreis zusammen.

$$3. -\left| A_E^*; U', A_E \times U \right|_I^\pm + \left| A_E^*; V', A_E \times V \right|_I^\pm + \left| A_E^*; W', A_E \times W \right|_I^\pm = 0.$$

Für B, C und D gelten entsprechende Gleichungen mit passender Signatur.

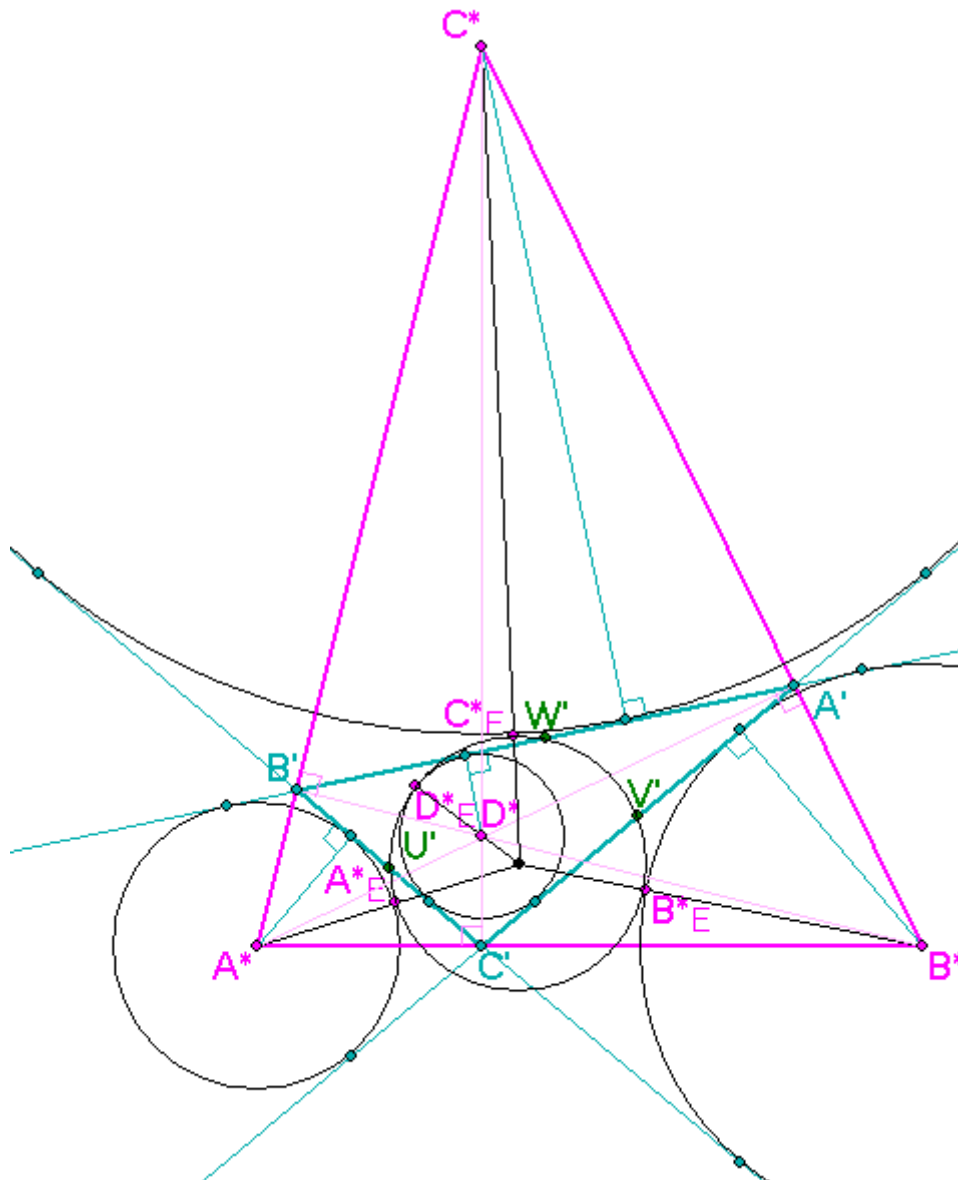


Abb. 12

Beweis: 1. Da σ' eine Streckung ist, werden die Berührungskreiszentren A, B, C und D von $U'V'W'$ in Berührungskreiszentren abgebildet. Die Behauptung folgt daraus aus der 5. Behauptung von Satz 6.

2. Wegen des Streckungsfaktors -2 ist dabei $|\rho_{P^*}|$ der zu P^* gehörige Berührungskreisradius .

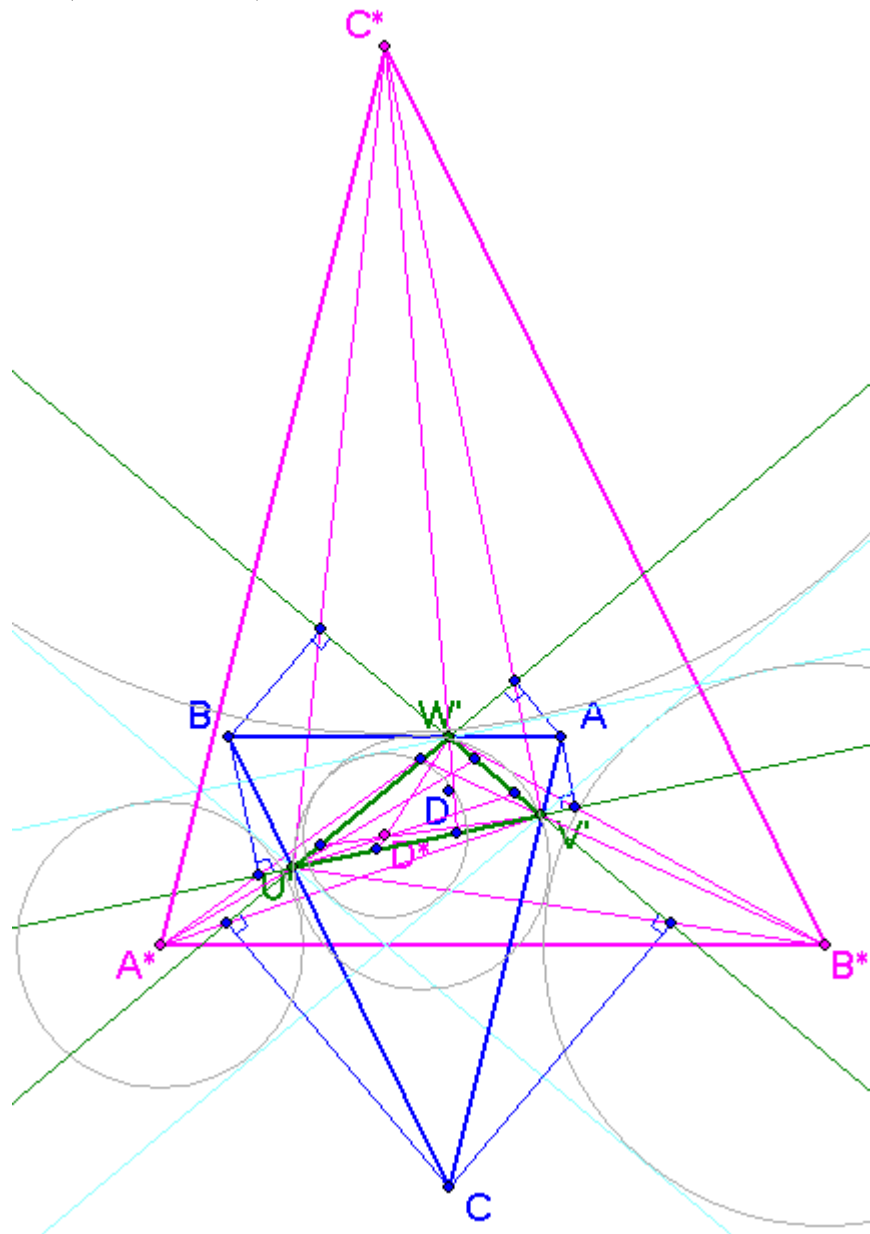
Nach Satz 2 ist $r_p^2 = 1 + 2\rho_p$ oder $r_p^2 = 1 - 2\rho_p$. Darum folgt auch die 2. Behauptung aus Satz 6.

$$\begin{aligned}
 3. & -|A_E^*; U', A_E \times U|_I^\pm + |A_E^*; V', A_E \times V|_I^\pm + |A_E^*; W', A_E \times W|_I^\pm = \\
 & -2 \cdot \text{Im}(A_E \cdot \bar{U}) + 2 \cdot \text{Im}(A_E \cdot \bar{V}) + 2 \cdot \text{Im}(A_E \cdot \bar{W}) = 2 \cdot \text{Im}(A_E \cdot \overline{-U + V + W}) = 2 \cdot \text{Im}(A_E \cdot \bar{A}) = \\
 & \text{Im}\left(\frac{1}{r_A} \cdot A \cdot \bar{A}\right) = \text{Im}(r_A) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Die vier Punkte $A_E^* = \text{Sign}(A^*)$, $B_E^* = \text{Sign}(B^*)$, $C_E^* = \text{Sign}(C^*)$ und $D_E^* = \text{Sign}(D^*)$ werden Feuerbachpunkte des Dreiecks $A'B'C'$ genannt nach ihrem Entdecker Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). Die vierte Behauptung bedeutet, dass für diese Punkte die Summe von zwei der Abstände von den Seitenmitten von $A'B'C'$ gleich dem dritten Abstand ist.

4. Nagel-Punkte

Nach Christian Heinrich von Nagel (1803-1882) liegt auf jeder Verbindungsgerade von einem Punkt P' mit $P \in \{U, V, W\}$ und einem Punkt Q^* mit $Q \in \{A, B, C, D\}$ ein Fußpunkt eines Lots von einem der Punkte A, B, C oder D auf eine Seitengerade des Dreiecks $U'V'W'$. Dies wird in Satz 8 gezeigt. Die Punkte Q^* mit $Q \in \{A, B, C, D\}$ werden Nagel-Punkte von $U'V'W'$ genannt. (Siehe Abb. 13)



Die Abbildung 14 fasst noch einmal einige Aspekte zusammen. Statt die Lote von A, B und C auf die Seitengeraden von $U'V'W'$ zu ziehen, kann man die Lote vom Orthozentrum H des Dreiecks UVW aus fällen (vgl. Abb. 8).

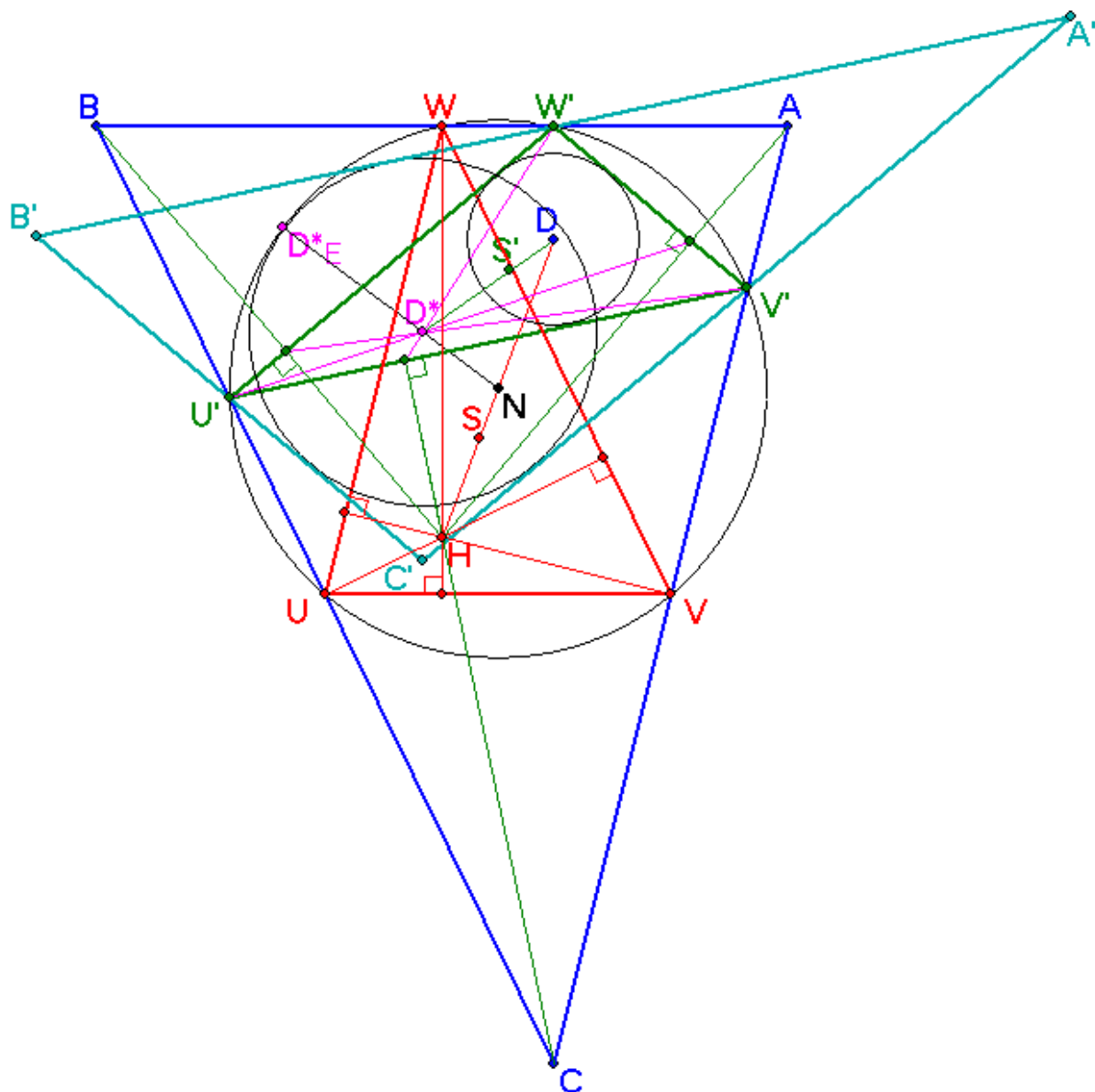


Abb. 14

Satz 8 : Für alle $P \in \{U, V, W\}$ und $Q, R \in \{A, B, C, D\}$, für die P', Q und R kollinear sind, gilt:

1. $P', L(Q, P)$ und R^* sind kollinear.

2. $\frac{L(Q, P) - P'}{R^* - P'} = -\frac{4 \cdot \rho_Q}{|QR|^2}$ (wobei $|QR|$ der Abstand von Q und R ist).

Beweis : Wir führen den Beweis für $P = U, Q = A$ und $R = D$. Für andere Kombinationen geht er analog.

Nach Satz 2 ist $L(A, U) - U' = A - \rho_A \cdot U - U'$

$$= -U + V + W - \operatorname{Re}(-1 - V\bar{W} + W\bar{U} + U\bar{V}) \cdot U - \bar{U}VW$$

$$= V + W + \operatorname{Re}(V\bar{W}) \cdot U - \operatorname{Re}(W\bar{U}) \cdot U - \operatorname{Re}(U\bar{V}) \cdot U - \bar{U}VW$$

$$= V + W + 0,5 \cdot (V\bar{W} + W\bar{V}) \cdot U - 0,5 \cdot (W\bar{U} + U\bar{W}) \cdot U - 0,5 \cdot (U\bar{V} + V\bar{U}) \cdot U - \bar{U}VW$$

$$= 0,5 \cdot V + 0,5 \cdot W + 0,5 \cdot UV\bar{W} + 0,5 \cdot U\bar{V}W - 0,5 \cdot U^2\bar{W} - 0,5 \cdot U^2\bar{V} - \bar{U}VW$$

$$= 0,5 \cdot \bar{U}V\bar{W} \cdot (W - U) \cdot (U - V) \cdot (UV + 2 \cdot VW + WU).$$

Nach Satz 6 ist $D^* - U' = -2 \cdot D + V' + W' = 2 \cdot U + 2 \cdot V + 2 \cdot W + UV\bar{W} + UV\bar{W}$
 $= \bar{V}\bar{W} \cdot (V + W) \cdot (UV + 2 \cdot VW + WU)$.

Darum ist

$$\frac{L(A,U) - U'}{D^* - U'} = \frac{0,5 \cdot \bar{U}\bar{V}\bar{W} \cdot (W - U) \cdot (U - V) \cdot (UV + 2 \cdot VW + WU)}{\bar{V}\bar{W} \cdot (V + W) \cdot (UV + 2 \cdot VW + WU)} = \frac{0,5 \cdot \bar{U} \cdot (W - U) \cdot (U - V)}{(V + W)}.$$

Wegen $A - D = -U + V + W - (-U - V - W) = 2 \cdot (V + W)$ und $|AD|^2 = 4 \cdot (V + W) \cdot (\bar{V} + \bar{W})$ und weil nach Hilfssatz 6 ρ_A gleich $0,5 \cdot \bar{U} \cdot (\bar{V} + \bar{W}) \cdot (U - V) \cdot (U - W)$ ist, gilt andererseits

$$\frac{4 \cdot \rho_A}{|AD|^2} = \frac{0,5 \cdot \bar{U} \cdot (\bar{V} + \bar{W}) \cdot (W - U) \cdot (U - V)}{(V + W) \cdot (\bar{V} + \bar{W})} = \frac{0,5 \cdot \bar{U} \cdot (W - U) \cdot (U - V)}{(V + W)}.$$

Da dies eine reelle Zahl ist, sind U' , $L(A,U)$ und D^* kollinear. □

Nach der 2. Behauptung ist also das Teilverhältnis $\vartheta(R^*, L(Q, P), P') = \frac{4 \cdot \rho_Q}{|QR|^2} \cdot \delta$.

5. Die affine Abbildung Δ

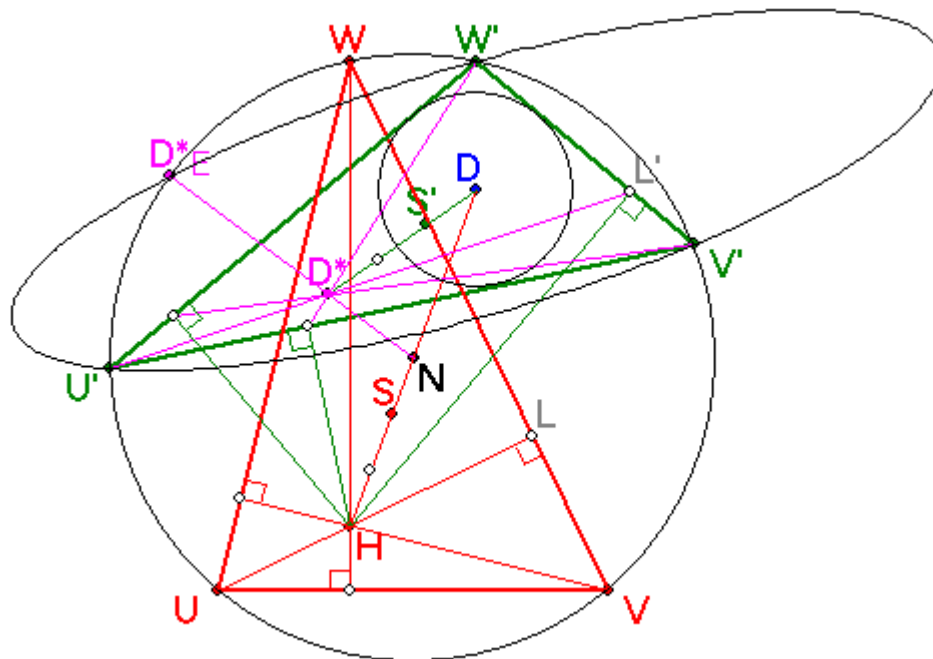


Abb. 15

Definition : Eine affine Abbildung der komplexen Ebene ist eine Abbildung δ der Punktmenge mit $\delta(r \cdot P + s \cdot Q) = r \cdot \delta(P) + s \cdot \delta(Q)$ für alle Punkt P, Q und alle reellen Zahlen r, s mit $r + s = 1$.

Daraus folgt, dass eine affine Abbildung δ folgende Eigenschaften hat:

- Wenn P, Q und R kollinear sind, dann auch $\delta(P), \delta(Q)$ und $\delta(R)$
- Für alle Teilverhältnisse kollinearere Punkte gilt $\vartheta(P, Q, R) = \vartheta(\delta(P), \delta(Q), \delta(R))$.
- Parallele Geraden werden in parallele Geraden abgebildet.

Die Orthogonalität bleibt bei affinen Abbildungen nicht notwendig erhalten.

Definition : Unter der Abbildung Δ verstehen wir die Abbildung $Z \rightarrow Z - (U + V + W) + \overline{Z} \cdot (UV + VW + WU)$.

Dann ist unter der Voraussetzung $r + s = 1$

$$\begin{aligned} \Delta(r \cdot P + s \cdot Q) &= r \cdot P + s \cdot Q - (r + s) \cdot (U + V + W) + \overline{(r \cdot P + s \cdot Q)} \cdot (UV + VW + WU) = \\ &= r \cdot (P - (U + V + W) + \overline{P} \cdot (UV + VW + WU)) + s \cdot (Q - (U + V + W) + \overline{Q} \cdot (UV + VW + WU)) \\ &= r \cdot \Delta(P) + s \cdot \Delta(Q). \end{aligned}$$

Darum ist Δ affin.

In Abbildung 15 ist die Ellipse Δ -Bild des Einheitskreises. D ist das Zentrum der Ellipse, weil $\Delta(N) = D$. Die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Ellipse sind U' , V' , W' und D_E^* .

Satz 9 : Δ hat folgende Eigenschaften:

1. Die Bilder von U, V, W, N, H, S sind beziehungsweise U', V', W', D, D^*, S' .
2. Durch Δ werden die Fußpunkte der Lote von H auf die Seitengeraden von UVW auf die Fußpunkte der Lote von H auf die Seitengeraden von $U'V'W'$ abgebildet.
3. Der Feuerbach-Punkt D_E^* ist Fixpunkt von Δ .

Beweis : 1. $\Delta(U) = U - (U + V + W) + \overline{U} \cdot (UV + VW + WU) = \overline{UVW}$,
 $\Delta(N) = -(U + V + W) = D$,

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= U + V + W - (U + V + W) + \overline{(U + V + W)} \cdot (UV + VW + WU) = \\ &= V + \overline{UVW} + W + U + W + \overline{UVW} + UV\overline{W} + V + W = -2 \cdot D + U' + V' + W' = D^* \end{aligned}$$

$$\Delta(S) = \Delta\left(\frac{1}{3} \cdot (U + V + W)\right) = \frac{1}{3} \cdot (\Delta(U) + \Delta(V) + \Delta(W)) = \frac{1}{3} \cdot (U' + V' + W') = S'$$

2. Der Fußpunkt L' des Lots von H auf die Gerade $V'W'$ ist wegen $H - A = 2 \cdot U$ der Fußpunkt $L(A, U)$. Darum ist L' nach Satz 8 mit U' und D^* kollinear. Da L' folglich der Schnittpunkt der Geraden $V'W'$ und $U'D^*$ ist und dies die Δ -Bilder der Geraden VW und UH sind, muss der Schnittpunkt L dieser beiden Geraden das Δ -Urbild von L' sein.

3. Wenn Z Fixpunkt von Δ ist, dann gilt $Z = Z - (U + V + W) + \overline{Z} \cdot (UV + VW + WU)$, also

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{U} + \overline{V} + \overline{W}}{\overline{UV} + \overline{VW} + \overline{WU}} = \frac{(\overline{U} + \overline{V} + \overline{W}) \cdot (U + V + W)}{(\overline{UV} + \overline{VW} + \overline{WU}) \cdot (U + V + W)} = \\ &= \frac{r_D^2}{2 \cdot (\overline{U} + \overline{V} + \overline{W}) + \overline{UVW} + \overline{UVW} + \overline{VUW}} = \frac{r_D^2}{D^*} = \frac{D^*}{r_{D^*}} \cdot \frac{r_D^2}{r_{D^*}} = D_E^*, \end{aligned}$$

da nach Satz 6 $r_{D^*} = r_D^2$ ist. \square

Bremen, 12. 4. 2013